

Theoreme und Paradoxien

**Eine Untersuchung
des Cantorschen Diagonalverfahrens**

Eva Maria Kobler

1964



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555224_0050

THEOREME UND PARADOXIEN

Eine Untersuchung
des Cantorschen Diagonalverfahrens

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophischen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von

Eva Maria Kobler
München

1964

Gedruckt mit Genehmigung der Philosophischen Fakultät
der Universität München

Referent: Prof. Dr. W. STEGMÜLLER
Korreferent: Prof. Dr. W. BRITZELMAYR

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Februar 1964



INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einführende Erläuterungen der verwendeten Grundbegriffe	I
A. Logik	I
B. Mengen und Abbildungen	III
C. Arithmetik	V
 Einleitung	 1
 Kapitel 1	 2
§ 1 Darstellung des Cantorschen Diagonalverfahrens	2
 Kapitel 2	 8
§ 1 Mengen, die ihre Potenzmenge als Teilmenge enthalten	8
§ 2 Die Antinomie von Burali-Forti	12
§ 3 Eine Widerlegung des Komprehensionsaxioms	12
 Kapitel 3	 14
§ 1 Zwei logische Paradoxien im Vergleich mit ihnen formal und inhaltlich verwandten Theoremen	14
§ 2 Theorie der berechenbaren Funktionen	18
§ 3 Vergleich der Ergebnisse mit der Paradoxie von Richard	28
 Kapitel 4	 30
§ 1 Die Grellingsche Paradoxie	30
 Zusammenfassung der Ergebnisse	 33

EINFÜHRENDE ERLÄUTERUNGEN DER VERWENDETEN GRUNDBEGRIFFE

A. LOGIK

Individuen sind die einfachsten Objekte, über die Aussagen gemacht werden können.

Der Individuenbereich ist die einem Sprachsystem zugrundegelegte Gesamtheit von Individuen.

Die in sprachlichen Ausdrücken vorkommenden Bezeichnungen für Individuen heißen Individualzeichen.

Ein Individualzeichen ist eine Individuenkonstante, wenn von einem bestimmten Gegenstand die Rede ist, eine Individuenvariable, wenn ein beliebiger Gegenstand gemeint ist.

Relationen oder Prädikate sind Aussagen über Objekte. Eine Aussage, welche eine Beziehung zwischen n Objekten darstellt, heißt eine n -stellige Relation bzw. ein n -stelliges Prädikat. 1-stellige Prädikate heißen auch Eigenschaften.

Auch Relationen können Objekte von Aussagen sein. Sie können in einem sprachlichen Ausdruck als Konstante oder Variable vorkommen, je nachdem mit dem für sie verwendeten Zeichen ein bestimmtes oder ein beliebiges Prädikat gemeint ist.

Wir verwenden folgende aussagenlogische Zeichen:

- | | |
|-------------------|--|
| 1) Negation | $\neg$ (nicht) |
| 2) Konjunktion | $\wedge$ (und) |
| 3) Diskonjunktion | $\vee$ (oder) |
| 4) Implikation | $\rightarrow$ (impliziert) |
| 5) Äquivalenz | $\leftrightarrow$ (dann und nur dann wenn) |

Sprachliche Ausdrücke, die Variable enthalten, können quantifiziert werden. Wir verwenden folgende Quantoren:

- 6) Allquantor $\bigwedge_x$ (für alle x)
 7) Existenzquantor $\bigvee_x$ (es gibt ein x)

Ein sprachlicher Ausdruck, der die Variable x enthält, aber keinen Quantor für x, enthält x frei.

Im Folgenden legen wir eine Sprache zugrunde, welche außer den logischen Zeichen 1) mit 7) folgende Prädikate benutzt:

- 8) $x = y$ (x ist identisch mit y)
 9) $x \in y$ (x ist Element von y)
 10) $x \notin y =_{\text{Def}} \neg x \in y$

und folgende sprachliche Ausdrücke als Formeln auszeichnet:

$$x = y \quad x \in y$$

Wenn A und B Formeln sind, so sind auch

$$\neg A \quad A \wedge B \quad A \vee B \quad A \rightarrow B \quad A \leftrightarrow B \quad \text{Formeln.}$$

Wenn A eine Formel ist, dann sind auch

$$\bigwedge_x A \quad \text{und} \quad \bigvee_x A \quad \text{Formeln.}$$

Eine Formel ist ein Satz, wenn sie keine freien Variablen enthält.
 Eine Formel ist eine Aussageform, wenn sie freie Variable enthält.
 Jeder Satz bedeutet entweder das Wahre oder das Falsche.

$$\ulcorner B \text{ folgt aus } A \urcorner =_{\text{Def}} \ulcorner A \rightarrow B \urcorner \text{ bedeutet das Wahre } \urcorner$$

Eine Ableitung eines S_n aus den Prämissen $S_1 \dots S_k$ (oder unter der Annahme der Gültigkeit von $S_1 \dots S_k$) ist eine endliche Reihe von Sätzen $S_1 \dots S_n$, von denen jeder entweder eine Prämisse, ein Axiom, ein Theorem, oder eine Definition ist, oder aus einem Satz folgt, der ihm in der Reihe vorausgeht.

Werden zur Ableitung eines Satzes keine Prämissen gebraucht, so ist er beweisbar und stellt ein Theorem dar.

Ist S_n ableitbar aus $S_1 \dots S_k$, so ist der Satz:

$$S_1 \wedge \dots \wedge S_k \rightarrow S_n \quad \text{beweisbar.}$$

Wir werden hinter jeder Zeile einer Ableitung oder eines Beweises in Klammern die Nummer des Theorems oder Axioms oder der Definition oder Zeile anführen, die wir zur Rechtfertigung dieser Zeile brauchen. Steht außer diesen Nummern in der Klammer der Buchstabe "L", so bedeutet das, daß Regeln oder Grundsätze der Formalen Logik zur Rechtfertigung dieser Zeile benötigt wurden.

B. MENGEN UND ABBILDUNGEN

Eine Menge wird durch eine definierende Bedingung, d. h. eine Aussageform mit einer freien Variablen eingeführt:

$\bigwedge_x (x \in M \leftrightarrow \phi(x))$ wo $\phi(x)$ eine Aussageform mit einer freien Variablen ist. (Andere Schreibweise: $M = (x/\phi(x))$)

Komprehensionsaxiom (K)

$\phi(x)$ sei eine Aussageform, d. h. Aussageform, dann gilt:

$$\bigvee_y \bigwedge_x (x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

Extensionalitätsaxiom (E)

$$\bigwedge_x (x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z$$

$$B,1) \text{ Def: } X \subset Y =_{\text{Def}} \bigwedge_x (x \in X \rightarrow x \in Y)$$

B,2) Def: Sind M_1 und M_2 Mengen und ist $F(m_1, m_2)$ eine 2-stellige Relation, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{m_1} \bigvee_{m_2} (m_1 \in M_1 \wedge m_2 \in M_2 \wedge F(m_1, m_2) \wedge \bigwedge_x (F(m_1, x) \rightarrow x = m_2)) \wedge \\ \bigwedge_{m_2} \bigvee_{m_1} (m_2 \in M_2 \wedge m_1 \in M_1 \wedge F(m_1, m_2) \wedge \bigwedge_y (F(y, m_2) \rightarrow y = m_1)) \end{aligned}$$

dann stellt die Funktion f , die folgendermaßen definiert ist:

$$f(m_1) = m_2 =_{\text{Def}} F(m_1, m_2)$$

eine eindeutige Abbildung der Menge M_1 auf die Menge M_2 dar.

M_1 heißt die Urbildmenge, oder der Vorbereich,
 M_2 heißt Bildmenge oder der Nachbereich.

Die Elemente von M_1 heißen die Urbilder und die ihnen durch f zugeordneten Elemente von M_2 ihre f -Bilder.

Wir sagen: f ist eine eindeutige Abbildung von Elementen von M_1 auf die Menge M_2 , wenn f eine eindeutige Abbildung einer Teilmenge von M_1 auf M_2 ist.

Elemente des Vor- bzw. Nachbereichs heißen Elemente der Abbildung.

B.3) Def: Die Menge X ist von größerer Mächtigkeit als die Menge Y :

$X \succ Y$ d.u.n.d., wenn gilt:

es gibt eine eindeutige Abbildung von X auf eine Teilmenge von Y ,
 aber es gibt keine eindeutige Abbildung von Y auf eine Teilmenge von X .

B.4) Def: Die Menge X ist äquivalent mit der Menge Y :

$X \approx Y$ d.u.n.d., wenn gilt:

es gibt eine eindeutige Abbildung von X auf Y .

B.5) Def: Eine Menge ist transitiv: $\text{Trs}(z)$ d.u.n.d., wenn gilt:

$$\bigwedge_x \bigwedge_y (x \in y \wedge y \in z \rightarrow x \in z)$$

B.6) Def: Eine Menge ist konnex: $\text{Konn}(z)$ d.u.n.d., wenn gilt:

$$\bigwedge_x \bigwedge_y (x \in z \wedge y \in z \rightarrow x \in y \vee x = y \vee y \in x)$$

B.7) Def: Eine Menge ist fundiert: $\text{Fund}(z)$ d.u.n.d., wenn gilt:

$$\bigwedge_x (x \in z \wedge x \neq 0 \vee \bigvee_y (y \in x \wedge \bigwedge_u (u \in x \rightarrow u \notin y))) \quad *)$$

B.8) Def: Eine Menge ist Ordinalzahl: $\text{Oz}(z)$ d.u.n.d., wenn gilt:

$$\text{Trs}(z) \wedge \text{Konn}(z) \wedge \text{Fund}(z)$$

B.9) Def: $\Omega =_{\text{Def}} (z / \text{Oz}(z))$

$$*) \quad x \neq 0 =_{\text{Def}} \neg(x = (p/p \wedge \neg p))$$

B.10) Theorem: $M \approx N$ d.u.n.d., wenn M einer Teilmenge von N und N einer Teilmenge von M äquivalent ist.

B.11) Theorem: $\bigwedge_X \bigwedge_Y (X > Y \vee X \approx Y \vee Y > X)$

B.12) Theorem: $\text{Fund}(z) \rightarrow z \notin z$

B.13) Theorem: $\text{Oz}(\Omega)$

C. ARITHMETIK

Wir verwenden folgende Prädikate und Funktionen der Arithmetik:

$a > b$	a größer b
$a \geq b$	a größer oder gleich b
$a + b$	a plus b
$a - b$	a minus b
$a \dot{-} b$	a minus b, wenn a größer b, sonst 0
$a \cdot b$	a multipliziert mit b
a^b	a hoch b

$$\prod_{k=1}^n a_k \stackrel{\text{Def}}{=} a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$\sum_{k=1}^n a_k \stackrel{\text{Def}}{=} a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Pr (k) ist die k-te Primzahl, die in der Reihe der natürlichen Zahlen vorkommt.

$\min y P(x, y)$ ist die Funktion, die jedem x aus der Menge der y die zu x in der Relation P(x, y) stehen, das kleinste Element zuordnet.

EINLEITUNG

Das Cantorsche Diagonalverfahren (CDV) findet in der Mengenlehre wie in der Theorie der Unentscheidbarkeit seine Anwendung als wichtiges Beweisprinzip. Daneben eignet es sich zur Konstruktion von Paradoxien. Diese problematische Situation gibt zu Bedenken Anlaß und macht es wünschenswert, das CDV einer logischen Analyse zu unterziehen. Ein solches Bemühen stößt allerdings auf eine prinzipielle Schwierigkeit:

Das CDV ist nicht, wie das Induktionsprinzip, ein festumrissenes Schlußschema, sondern die Äquivalenzklasse aller Beweise, die in einer noch nicht verbindlich beschriebenen Ähnlichkeitsrelation zum Beweis der Nichtabzählbarkeit der Klasse der unendlichen Dezimalbrüche stehen.

Da es nicht sinnvoll wäre, ein Problem zu untersuchen, von dem nicht genau gesagt werden kann, worin es eigentlich besteht, soll ein Versuch einer Darstellung des CDV die Diskussion eröffnen. Die Frage, der wir dann im Folgenden nachgehen wollen, lautet:

Was unterscheidet die Herleitung eines Widerspruches mit Hilfe des CDV vom Beweis eines Theorems, der auf einer Anwendung dieses Verfahrens beruht, und inwieweit ist die Argumentation in beiden Fällen vergleichbar?

in der n-ten Stelle nach dem Komma von dem Dezimalbruch unterscheidet, der auf die Zahl n abgebildet wurde, ebenfalls in der Aufzählung enthalten sein. Das ist aber schon auf Grund dieser Konstruktionsvorschrift unmöglich, denn jeder unendliche Dezimalbruch d_n unserer Aufzählung hat an der n-ten Stelle nach dem Komma die Ziffer a_n^n , wenn n die natürliche Zahl ist, auf welche d_n abgebildet wurde.

Also gibt es kein f, das eineindeutig die Menge der Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 auf die Menge der natürlichen Zahlen abbildet.

1.3 Behauptung:

Ist P die Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge M, so gibt es keine eineindeutige Abbildung der Menge P auf die Menge M.

Beweis:

Angenommen, es gäbe eine eineindeutige Abbildung von P auf M - wir wollen sie im Folgenden mit f bezeichnen und als Konstante auffassen -, dann wäre die Menge p_0 , sodaß

$$p_0 = \{ m \mid \bigvee_p (f(p) = m \wedge m \notin p) \}$$

als Teilmenge von M Element von P und müßte durch f einem Element von M zugeordnet werden können. Jedes Element von P, das ein Bild in M besitzt, kann aber durch die Eigenschaft ausgezeichnet werden, sein Bild entweder als Element zu enthalten oder nicht:

$$\bigwedge_p \bigvee_m (f(p) = m \wedge (m \in p \vee m \notin p))$$

Also gibt es auch ein m_0 aus M, von dem gilt:

$$(m_0 \in p_0 \vee m_0 \notin p_0) \wedge f(p_0) = m_0$$

- | | | |
|----|--|------------|
| A) | $m_o \in p_o \wedge f(p_o) = m_o$ | (Prämisse) |
| 1) | $m_o \in p_o$ | (A, L) |
| 2) | $f(p_o) = m_o$ | (A, L) |
| 3) | $p_o = (m / \bigvee_p (f(p) = m \wedge m \notin p))$ | (Def) |
| 4) | $m_o \in p_o \longrightarrow \bigvee_p (f(p) = m_o \wedge m_o \notin p)$ | (3, L) |
| 5) | $\bigvee_p (f(p) = m_o \wedge m_o \notin p)$ | (1, 4, L) |
| 6) | $f(p_o) = m_o \wedge m_o \notin p_o$ | (2, 5, L) |
| 7) | $m_o \notin p_o$ | (6, 2, L) |
| 8) | $m_o \in p_o \longrightarrow m_o \notin p_o$ | (1, 7, L) |
-
- | | | |
|-----|--|------------|
| B) | $m_o \notin p_o \wedge f(p_o) = m_o$ | (Prämisse) |
| 1) | $m_o \notin p_o$ | (B, L) |
| 2) | $f(p_o) = m_o$ | (B, L) |
| 3) | $p_o = (m / \bigvee_p (f(p) = m \wedge m \notin p))$ | (Def) |
| 4) | $m_o \in p_o \longleftrightarrow \bigvee_p (f(p) = m_o \wedge m_o \notin p)$ | (3, L) |
| 5) | $\neg (m_o \in p_o) \longleftrightarrow \neg \bigvee_p (f(p) = m_o \wedge m_o \notin p)$ | (L, 4) |
| 6) | $m_o \notin p_o \longrightarrow \neg \bigvee_p (f(p) = m_o \wedge m_o \notin p)$ | (L, 5) |
| 7) | $\neg \bigvee_p (f(p) = m_o \wedge m_o \notin p)$ | (L, 6, 1) |
| 8) | $\bigwedge_p (f(p) = m_o \longrightarrow m_o \in p)$ | (L, 7) |
| 9) | $f(p_o) = m_o \longrightarrow m_o \in p_o$ | (L, 8) |
| 10) | $m_o \in p_o$ | (L, 8, 2) |
| 11) | $m_o \notin p_o \longrightarrow m_o \in p_o$ | (L, 1, 10) |

Da p_0 nicht die Eigenschaft erfüllt, die jedes durch f abgebildete Element von P besitzen muß, kann p_0 durch f keinem Bild in M zugeordnet worden sein. Die Annahme, daß es eine eindeutige Abbildung f von P auf M gebe, ist somit widerlegt.

Was ist nun das Gemeinsame an beiden Beweisen, was uns berechtigt, vom "Cantorschen Diagonalverfahren" im einen Fall und seiner "Nachbildung" im andern Fall zu sprechen?

Zunächst ist die Ausgangssituation die gleiche:

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind gegeben und es soll festgestellt werden, ob M_1 durch eine eindeutige Funktion auf M_2 abgebildet werden kann. Im ersten Fall (1.2) war M_1 die Menge der unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 und M_2 die Menge der natürlichen Zahlen. Im zweiten Fall (1.3) war M_1 die Potenzmenge einer beliebigen Menge M , die hier dem M_2 entspricht.

In beiden Fällen wurde dann gezeigt, daß es keine eindeutige Abbildung von M_1 auf M_2 gibt.

Der Beweisgang von 1.2 ist mit dem von 1.3 insofern vergleichbar, als in beiden Fällen unter der Annahme, daß es eine eindeutige Abbildung gebe und daß f eine solche Abbildung sei, eine Relation $E(m_1, f(m_1))$ definiert wurde, die nur zwischen den Elementen von M_1 und ihren Bildern in M_2 bestehen kann. Diese Relation lautete im ersten Fall: ist n die natürliche Zahl, auf die der Dezimalbruch d_n durch f abgebildet wurde, so ist a_n^n die Ziffer in der n -ten Dezimale. Im zweiten Fall hatten wir die Relation: ist m das Bild von p , so gilt, daß m entweder Element von p ist oder nicht Element von p ist.

Weiterhin wurde unter der Annahme, daß f eine eindeutige Abbildung sei, unter Bezugnahme auf f ein Element e von M_1 definiert, das zu seinem Bild nicht in der Relation E steht. e war im ersten Fall der Dezimalbruch $d < 1$, der sich an der n -ten Stelle nach dem Komma für jedes n von a_n^n unterscheidet. Im zweiten Fall war e die Menge p_0 , wobei p_0 folgendermaßen definiert war:

$$p_0 = \{m / \forall p (f(p) = m \wedge m \notin p)\}$$

Als Ergebnis des Vergleichs der beiden Fälle wollen wir eine vorläufige Fassung des CDV anführen:

1.4 Vorläufige Fassung des CDV:

Liegt zu gegebenen Mengen M_1 und M_2 eine eindeutige Abbildung f von Elementen der Menge M_1 auf die Menge M_2 vor und kann eine Relation $E(m_1, f(m_1))$ definiert werden, deren Vorbereich die Menge der Urbilder in M_1 ist, während ihr Nachbereich aus den f -Bildern des Vorbereichs besteht, so daß jedes Urbild zu seinem f -Bild in der Relation E stehen muß, und kann ein Element e aus M_1 definiert werden ¹⁾, das zu seinem f -Bild nicht in der Relation E steht, so ist e kein Urbild, d.h. es wird durch f keinem Element von M_2 zugeordnet.

Diese Schlußfolgerung ist trivial. Problematisch können ihre Voraussetzungen sein. So wurde in den behandelten Beispielen jenes Element, das zu seinem Bild nicht in der Relation E steht, unter Bezugnahme auf die Abbildung f definiert. Intuitiv gesprochen heißt das: die Definition von e , von dem entschieden werden soll, ob es zur Urbildmenge gehört oder nicht, setzt die Abbildung f und damit sogar die Entscheidung darüber, welche Gegenstände Elemente der Abbildung sind, voraus.

Diese von B. Russell aufgezeigte Zirkularität führt in manchen Fällen zu Paradoxien, und hier liegt die Fragwürdigkeit des CDV. Dabei läßt sich die gemeinsame Struktur aller durch das CDV gewonnenen Paradoxien folgendermaßen charakterisieren:

Zu einer Menge M_1 und einer Abbildung f wird eine Menge M_2 so definiert, daß jedes Element von M_2 ein und nur ein Urbild in M_1 und jedes Element von M_1 ein und nur ein Bild in M_2 hat. Dabei ist die Menge M_1 so beschaffen, daß sie die Menge e

$$e = (m_2 / \bigvee_{m_1} (f(m_1) = m_2 \wedge (m_2 \notin M_1)))$$

als Element enthält. Jedes Urbild in M_1 wird durch die Eigenschaft:

$$\bigvee_{m_2} (f(m_1) = m_2 \wedge (m_2 \in m_1 \vee m_2 \notin m_1))$$

ausgezeichnet. Da jedes Element von M_1 ein Bild in M_2 besitzt, gibt es auch zu e ein Bild $f(e)$. Auch e , da es Urbild in M_1 ist, muß die Eigenschaft

$$\bigvee_{m_2} (f(e) = m_2 \wedge (m_2 \in e \vee m_2 \notin e))$$

erfüllen, d.h. es muß zu seinem Bild in der Relation:

1) Das nichtabbildbare Element e wird im Folgenden bisweilen als "Diagonalelement" bezeichnet werden.

$$f(e) \in e \vee f(e) \notin e$$

stehen, was auf Grund seiner Definition unmöglich ist. Denn aus

$$f(e) \in e \quad \text{folgt} \quad f(e) \notin e \quad \text{und umgekehrt.}$$

Ein wichtiger Spezialfall paradoxer Situationen ergibt sich aus der allgemeinen Struktur der durch das CDV gewonnenen Paradoxien, wenn man M_2 als mit M_1 identisch definiert, und für f die identische Abbildung jedes Elementes auf sich wählt. Ist M_1 dann so beschaffen, daß es die Menge e , wobei $e = (m_1 / m_1 \in M_1 \wedge m_1 \notin m_1)$

als Element enthält, dann erfüllt e die triviale Eigenschaft

$$e \in M_1 \wedge (e \in e \vee e \notin e)$$

durch welche genau die Elemente von M_1 ausgezeichnet sind, nicht.

Wir wollen die Menge $e : (m_1 / m_1 \in M_1 \wedge m_1 \notin m_1)$

die kritische Menge von M_1 nennen.

Die im nächsten Kapitel folgenden vier Paradoxien der Mengenlehre sind Beispiele für den zuletzt dargestellten Typ von Widersprüchen. Wir lernen vier Mengen kennen, die jeweils ihre kritische Menge als Element enthalten. Die drei zuerst behandelten Mengen haben darüber hinaus den Umstand gemeinsam, daß sie ihre Potenzmenge als Teilmenge enthalten. Daraus folgt natürlich, daß sie auch ihre kritische Menge als Element enthalten.

KAPITEL 2

§ 1

Mengen, die ihre Potenzmenge als Teilmenge enthalten

Def: Ist M eine Menge, so ist die Menge aller ihrer Teilmengen ihre Potenzmenge.

Die Allklasse C ist definiert durch die Aussageform: $x = x$

Es gilt: $C = \{x / x = x\}$

Behauptung: $\bigwedge_p (p \subset C \rightarrow p \in C)$

Beweis:

1) $p \subset C$ (wo p eine Variable ist) (Prämisse)

2) $p = p \rightarrow p \in C$ (Def von C)

3) $\bigwedge_x (x \in p \leftrightarrow x \in p)$ (L)

4) $\bigwedge_x (x \in p \leftrightarrow x \in p) \rightarrow p = p$ (E, L)

5) $p = p$ (4, 3, L)

6) $p \in C$ (2, 5, L)

7) $p \subset C \rightarrow p \in C$ (1, 6, L)

8) $\bigwedge_p (p \subset C \rightarrow p \in C)$ (7, L)

Die Russellsche Klasse ist definiert durch die Aussageform:

$$x \notin x$$

Es gilt: $R = \{x / x \notin x\}$

Behauptung: $\bigwedge_Q (Q \subset R \rightarrow Q \in R)$

Beweis:

1) $Q \not\subset Q \leftrightarrow Q \in R$ (wo Q eine Variable ist) (Def von R , L)

2) $Q \subset R \rightarrow \bigwedge_x (x \in Q \rightarrow x \in R)$ (B1)

3) $Q \subset R \rightarrow \bigwedge_x (x \in Q \rightarrow x \in x)$ (1, 2, L)

4) $Q \subset R \rightarrow (Q \in Q \rightarrow Q \notin Q)$ (3, L)

5) $Q \subset R \rightarrow \neg(Q \in Q \wedge Q \in Q)$ (4, L)

6) $Q \subset R \rightarrow \neg Q \in Q$ (5, L)

7) $Q \subset R \rightarrow Q \in R$ (1, 6, L)

8) $\bigwedge_Q (Q \subset R \rightarrow Q \in R)$ (7, L)

Für die Klasse $X = (x / \bigwedge (y \in x \rightarrow x \notin y))$ gilt die

Behauptung: $\bigwedge_Q (Q \subset X \rightarrow Q \in X)$

Beweis:

- 1) $Q \subset X \rightarrow \bigwedge_X (x \in Q \rightarrow (Q \in x \rightarrow x \notin Q))$ (B.1, Def von X, L) (Q ist Variable)
- 2) $Q \subset X \rightarrow \bigwedge_X (x \in Q \rightarrow \neg(Q \in x \wedge x \in Q))$ (1, L)
- 3) $Q \subset X \rightarrow \bigwedge_X (x \in Q \wedge Q \in x \wedge x \in Q)$ (2, L)
- 4) $Q \subset X \rightarrow \bigwedge_X (x \in Q \rightarrow Q \notin x)$ (3, L)
- 5) $\bigwedge_X (x \in Q \rightarrow Q \notin x) \rightarrow Q \in X$ (Def von X, L)
- 6) $Q \subset X \rightarrow Q \in X$ (4, 5, L)
- 7) $\bigwedge_Q (Q \subset X \rightarrow Q \in X)$

Diese drei Mengen enthalten jede ihrer Teilmengen als Element.

Das bedeutet, daß jede dieser drei Mengen ihre Potenzmenge als Teilmenge enthält.

Wir beweisen nun den Satz:

2.1) Theorem $P(M) \subset M \rightarrow M \approx P(M)$ wo $P(M)$ Potenzmenge von M ist.

Beweis:

Nach B.11 brauchen wir nur zu beweisen, daß $P(M)$ auf eine Teilmenge von M , und M auf eine Teilmenge von $P(M)$ eineindeutig abgebildet werden kann.

- 1) Da $P(M)$ Teilmenge von M ist, kann $P(M)$ durch die identische Abbildung auf eine Teilmenge von M abgebildet werden.
- 2) Ordnet man jedem Element m von M in $P(M)$ das Element $p = (x/x=m)$ zu, so hat man durch diese Vorschrift M eineindeutig auf eine Teilmenge von $P(M)$ abgebildet.

Also ist M mit $P(M)$ äquivalent, was zu beweisen war.

Gemäß 1.3) ist aber für jede beliebige Menge M die Potenzmenge $P(M)$ von größerer Mächtigkeit, d. h. es gibt keine eineindeutige Abbildung von M auf $P(M)$.

Damit haben wir für alle Mengen, die ihre Potenzmenge als Teilmenge enthalten, einen Widerspruch nachgewiesen. Insbesondere haben wir gezeigt, daß die Mengen C , R , X ihre Potenzmenge als Teilmenge enthalten, woraus einerseits folgt, daß sie mit ihrer Potenzmenge äquivalent sind, was dem Cantorschen Theorem widerspricht, andererseits, daß sie jeweils ihre kritische Menge als Element enthalten, was ebenfalls auf einen Widerspruch führt.

Wir wollen nun noch auf die bemerkenswerte Tatsache eingehen, daß die kritische Menge der Allmenge C die Russell'sche Menge R ist, was zunächst bewiesen werden soll.

Die kritische Menge von C ist: $(x/x \in C \wedge x \notin x)$
 oder, da $x \in C \leftrightarrow x = x$ wegen Def von C ,
 $(x/x = x \wedge x \notin x)$.

Unsere Behauptung ist also:

$(x/x = x \wedge x \notin x) = (x/x \notin x)$ oder wegen (E)
 $x = x \wedge x \notin x \leftrightarrow x \notin x$

Behauptung:

$x = x \wedge x \notin x \leftrightarrow x \notin x$

Beweis:

- 1) $x = x \wedge x \notin x \rightarrow x \notin x$ (L)
- 2) $\bigwedge_x \bigwedge_y (y \in x \leftrightarrow y \in x)$ (L)
- 3) $\bigwedge_x \bigwedge_y (y \in x \leftrightarrow y \in x) \rightarrow x = x$ (E, L)
- 4) $\bigwedge_x (x = x)$ (2, 3, L)
- 5) $x \notin x$ (Prämisse)
- 6) $x \notin x \wedge x = x$ (4, 5, L)
- 7) $x \notin x \rightarrow x \notin x \wedge x = x$ (5, 6, L)
- 8) $x \notin x \leftrightarrow x \notin x \wedge x = x$ (1, 7, L)

Die kritische Menge der Russell'schen Menge ist die Russell'sche Menge selbst:

$(x/x \in R \wedge x \notin x) = (x/x \notin x)$ oder: $x \in R \wedge x \notin x \leftrightarrow x \notin x$

Beweis:

- 1) $x \in R \leftrightarrow x \notin x$ (Def von R)
- 2) $x \notin x \wedge x \notin x \leftrightarrow x \notin x$ (L)
- 3) $x \in R \wedge x \notin x \leftrightarrow x \notin x$ (1, 2, L)

Das bedeutet, daß die Russell'sche Menge durch die Tatsache ihrer Existenz sowohl zur Russell'schen als auch zur Cantorschen Paradoxie Anlaß gibt. Diese in sich paradoxe Menge wird durch das Komprehensionsaxiom der naiven Mengenlehre als sinnvoller Gegenstand legitimiert.

Würde R aus dem Bereich der zulässigen Individuen des Systems entfernt, so wäre es denkbar, daß nicht nur die Paradoxie von Russell, sondern auch

die von Cantor verschwinden würde. Wie wir uns erinnern, konnte die Cantorsche Antinomie auf zwei Arten erzeugt werden:

- 1) indem gezeigt wurde, daß C seine kritische Menge als Element enthält,
- 2) indem bewiesen wurde, daß C von größerer oder gleicher Mächtigkeit wie seine Potenzmenge $P(C)$ ist.

Die erste Fassung der Antinomie würde freilich unmöglich, wenn R keine zulässige Menge mehr wäre, da R dann weder Teilmenge noch Element noch Nicht-Element einer anderen Menge sein könnte. Aber wie steht es mit der zweiten Fassung? Hier wurde die kritische Menge explizit nicht verwendet, sondern der Widerspruch wurde zwischen den beweisbaren Aussagen:

$$C \succ P(C) \vee C \approx P(C) \quad \text{und} \quad C \prec P(C)$$

erzeugt, wozu wir nur zeigen mußten, daß C jede ihrer Teilmengen als Element enthält. Dagegen ist zu sagen, daß das Cantorsche Theorem in einem System mit beschränktem Komprehensionsaxiom ebenfalls eine Einschränkung seiner Gültigkeit erfahren könnte. Der Beweis des Cantorschen Theorems beruht doch auf der Konstruktion der nicht abbildbaren Menge:

$$(m / \bigvee_p (f(p) = m \wedge m \notin p))$$

Im Rahmen der naiven Mengenlehre ist die Existenz jeder Menge dieser Gestalt, welche Abbildung wir für f auch wählen würden, durch das Komprehensionsaxiom gesichert. In einem System mit beschränktem Komprehensionsaxiom muß das nicht der Fall sein. Die Ersetzung des f durch die identische Abbildung und des M durch C würde z. B. auf eine unzulässige Menge führen. Es wäre also denkbar, daß ein solches System die Anwendung des Cantorschen Theorems auf C verbietet.

Diese inhaltliche Überlegung macht es begreiflich, daß Systeme der Mengenlehre möglich sind, in denen die Allmenge zulässig ist, ohne daß daraus ein Widerspruch erzeugt werden kann; denn die Allklasse ist im Gegensatz zur Russell'schen Klasse nicht notwendig sinnlos.

§ 2

Die Antinomie von Burali-Forti

Ω enthält seine kritische Menge als Element.

Beweis:

- 1) $Oz(z) \leftrightarrow Trs(z) \wedge Konn(z) \wedge Fund(z)$ (B. 8)
- 2) $Fund(z) \rightarrow z \notin z$ (B. 12)
- 3) $Oz(z) \rightarrow z \notin z$ (1, 2, L)
- 4) $\Omega = (z / Oz(z))$ (B. 9)
- 5) $\Omega = (z / Oz(z) \wedge z \notin z)$ (3, 4, L)
- 6) $Oz(\Omega)$ (B. 13)
- 7) $(z / Oz(z) \wedge z \notin z) \in \Omega$ (5, 6, L)

Wir sehen, daß die kritische Menge von Ω gerade Ω ist, und das ist es, was die Ähnlichkeit dieser Antinomie mit der Antinomie von Russell ausmacht, denn auch die kritische Menge der Russell'schen Menge ist die Russell'sche Menge selbst.

Der Unterschied zwischen beiden Paradoxien ist darin zu sehen, daß im Gegensatz zur Menge R die Menge Ω ihre Potenzmenge nicht als Teilmenge enthält.

Aus der Ähnlichkeit der beiden Paradoxien sehen wir übrigens, daß die "Menge aller Ordinalzahlen" in jedem widerspruchsfreien System der Mengenlehre, in dem der Ordinalzahlbegriff in der hier dargestellten Weise eingeführt wird, ein unzulässiges Individuum ist, genau wie die Russell'sche Menge.

§ 3

Eine Widerlegung des Komprehensionsaxioms

In den vorangehenden Paragraphen haben wir festgestellt, daß das Komprehensionsaxiom Mengen zu bilden gestattet, die in sich paradox sind. Kein widerspruchsfreies System der Mengenlehre kann Mengen solcher Art als zulässige Individuen enthalten. Unter der Voraussetzung, daß die Extension jedes beliebigen Prädikates zum Definitionsbereich dieses Prädikates gehört, konnten mit Hilfe des CDV Widersprüche erzeugt werden. Anderer-

seits kann das CDV dazu benutzt werden, eben diese Voraussetzung zu widerlegen.

Unter den Extensionen aller Prädikate sind auch die der einstelligen Individuenprädikate, deren Definitionsbereich der Individuenbereich I ist. Ist PI die Klasse aller Individuenprädikateextensionen, die selbst Elemente des Individuenbereiches I sind, so gilt: $PI \subset I$

Wir zerlegen I in die Klassen: I_1, I_2 wie folgt:

$$I_1 = (i/i \in I \wedge i \in PI), \quad I_1 = PI, \quad I_2 = (i/i \in I \wedge i \notin PI)$$

Von den Elementen von PI ist es sinnvoll, zu fragen, ob sie sich selbst als Element enthalten, oder nicht, da sie sowohl Individuen als auch Prädikateextensionen sind. Jedes Element von PI hat also entweder die Eigenschaft, sich selbst als Element zu enthalten, oder sich selbst nicht als Element zu enthalten. Daher zerfällt I_1 in die zwei Klassen I_{1a} und I_{1b} , wobei

$$I_{1a} = (i/i \in I \wedge i \in PI \wedge i \in i)$$

$$I_{1b} = (i/i \in I \wedge i \in PI \wedge i \notin i)$$

Da I_{1b} die Extension eines Individuenprädikates ist, folgt, daß I_{1b} entweder Element von PI ist oder nicht.

Aus $I_{1b} \in PI$ würde folgen:

$$I_{1b} \in I_{1a} \vee I_{1b} \in I_{1b} \quad \text{was aber falsch ist, da gilt:}$$

$$I_{1b} \in I_{1b} \rightarrow I_{1b} \notin I_{1b} \quad \text{und}$$

$$I_{1b} \in I_{1a} \rightarrow I_{1b} \in I_{1b} \rightarrow I_{1b} \notin I_{1a}$$

Also kann I_{1b} nicht in PI liegen, und daher ist I_{1b} auch nicht Element von I.

Damit haben wir gezeigt, daß zum Individuenbereich nicht die Extension jedes Individuenprädikates zu gehören braucht. Allgemein können wir sagen, daß nicht jede Prädikateextension zum Definitionsbereich eines jeden Prädikates gehören muß, wie die naive Mengenlehre annimmt.

Mit diesem Ergebnis schließen wir die Darstellung von Antinomien der Mengenlehre ab und wenden uns einer Gruppe von Paradoxien zu, die unter der Voraussetzung zustande kommt, daß die Anzahl der in einer endlichen Sprache ausdrückbaren oder definierbaren Gegenstände höchstens abzählbar unendlich sei.

KAPITEL 3

§ 1

Zwei logische Paradoxien im Vergleich mit ihnen formal und inhaltlich verwandten Theoremen

Rufen wir uns nocheinmal den Beweis der Überabzählbarkeit der Menge der unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 ins Gedächtnis zurück:

Angenommen, es gäbe eine eindeutige Abbildung f der unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 auf die Menge der natürlichen Zahlen. Jeder Dezimalbruch d_n der Aufzählung wäre dann dadurch ausgezeichnet, daß er an n -ter Stelle nach dem Komma eine gewisse Ziffer a_n^n stehen hätte, wobei n das f -Bild von d_n wäre. Bildet man den Dezimalbruch $d < 1$, der sich an der n -ten Stelle nach dem Komma für jedes n von a_n^n um ± 1 unterscheidet, je nachdem $a_n^n = 0$ oder $a_n^n > 0$ ist, so ist dieser Dezimalbruch nicht in der Menge der abgebildeten Dezimalbrüche enthalten. Also ist die Menge der Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 überabzählbar. Dieser Tatbestand kann folgendermaßen in eine Paradoxie umgewandelt werden:

Ein definierbarer Dezimalbruch wird durch eine endliche Zeichenreihe ausgedrückt. Es gibt nur abzählbar unendlich viele definierbare Dezimalbrüche.

Also gibt es eine Abbildung aller definierbaren Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 auf die Menge der natürlichen Zahlen. Unter Bezugnahme auf diese Menge definieren wir den Dezimalbruch $d < 1$ durch folgende Vorschrift:

Ist a_n^n die an n -ter Stelle nach dem Komma stehende Ziffer des der Zahl n zugeordneten Dezimalbruches, so unterscheide sich d an n -ter Stelle nach dem Komma von a_n^n um ± 1 je nachdem $a_n^n = 0$ oder $a_n^n > 0$. Dieser durch eine endliche Zeichenreihe definierte Dezimalbruch < 1 kann seiner Definition gemäß nicht in der Menge der Abgebildeten Dezimalbrüche vorkommen, was der Voraussetzung widerspricht, daß die Menge der definierbaren Dezimalbrüche abzählbar ist.

Nach dem gleichen Verfahren erhalten wir aus einem sinnvollen Satz die Richard'sche Paradoxie.

Jedes Prädikat kann durch seine Extension repräsentiert werden. Die einstelligen Zahlprädikate können somit als Zahlenklassen verstanden werden, in denen genau die Zahlen vorkommen, auf welche das durch sie repräsentierte Prädikat zutrifft.

Über die Mächtigkeit dieser Klasse von Prädikaten können wir zunächst noch nichts sagen.

Denken wir uns eine eindeutige Abbildung f von Elementen dieser Menge auf die Menge der natürlichen Zahlen, so kann jedes Element der Urbildmenge durch die folgende Aussageform ausgezeichnet werden:

$$\bigvee_n (f(P) = n \wedge (n \in P \vee n \notin P))$$

Nun definieren wir eine Zahlenklasse Z durch folgende Vorschrift: Z enthält die Zahl n dann und nur dann, wenn das durch f dem n zugeordnete Prädikat P auf die Zahl n nicht zutrifft, d. h. wenn die dieses Prädikat repräsentierende Zahlenklasse n nicht enthält. Diese Zahlenklasse Z repräsentiert ebenfalls ein einstelliges Zahlprädikat, ist aber nicht in der Menge der abgebildeten Zahlprädikate enthalten. Also ist die Menge der einstelligen Zahlprädikate überabzählbar.

Nehmen wir zu den Voraussetzungen dieses Satzes die Annahme hinzu, daß es nur abzählbar viele in einer endlichen Sprache ausdrückbare einstellige Zahlprädikate gibt, so erhalten wir die Paradoxie von Richard; denn unter dieser Voraussetzung kann jedes einstellige Zahlprädikat, das in einer endlichen Sprache ausdrückbar ist, auf eine natürliche Zahl abgebildet werden, indem wir etwa jedem dieser Prädikate eine natürliche Zahl als Index zuordnen.

$$A_1(x), A_2(x) \dots A_n(x) \dots$$

sei die unendliche Folge aller in einer endlichen Sprache ausdrückbaren einstelligen Zahlprädikate. Da für jede Zahl x und jeden Index n gelten muß: $A_n(x)$ ist wahr oder $\neg A_n(x)$ ist wahr, können wir die Prädikate, denen eine natürliche Zahl als Index zugeordnet wurde, durch die Eigenschaft:

$$A_n(x) \vee \neg A_n(x) \text{ charakterisieren.}$$

Das Prädikat $P(x)$, das wir unter Bezugnahme auf alle Prädikate unserer Aufzählung definieren als:

$$P(x) =_{\text{Def.}} \neg A_x(x),$$

hat nun diese Eigenschaft nicht. Es unterscheidet sich von jedem Prädikat

der Aufzählung hinsichtlich dieser Eigenschaft, und die Aufzählung enthält es daher nicht. Da wir angenommen haben, daß diese Aufzählung alle in einer Sprache ausdrückbaren endlichen einstelligen Zahlprädikate enthält, und da auch $P(x)$ in dieser Sprache ausdrückbar war, befinden wir uns in einem Widerspruch.

Diese beiden Paradoxien kann man in folgendes Schema zusammenfassen:

- 1) Innerhalb einer Menge X gibt es eine höchstens abzählbare Teilmenge X' von Gegenständen x , die durch eine endliche Zeichenreihe definiert werden können.
- 2) X' kann daher der Menge der natürlichen Zahlen umkehrbar eindeutig zugeordnet werden.
- 3) Es gibt ein Objekt x_0 , das unter Bezugnahme auf X' mittels einer endlichen Zeichenreihe definiert werden kann und so beschaffen ist, daß es zu X gehört, sich aber auf Grund seiner Definition von jedem Element von X' unterscheidet und dadurch nicht zu X' gehören kann, obwohl es zu X' gehören müßte.

Die Situation ist hier nicht so ausweglos wie in den Paradoxien der Mengenlehre, denn bei der Entstehung des Widerspruchs ist eine empirische Komponente im Spiel: der Begriff des "endlich ausdrückbaren Prädikates" bzw. des "endlich definierbaren Dezimalbruches".

Dieser Begriff, der zwar recht klar erscheint, bedarf aber in Wirklichkeit einer Klärung, denn jeder weiß zwar, was eine endliche Zeichenreihe sein soll, aber nicht jeder weiß, welche Eigenschaften eine endliche Zeichenreihe haben muß, um beispielsweise ein Prädikat auszudrücken. Die einzig sinnvolle Interpretation scheint mir die zu sein, die besagt:

$P(x_1 \dots x_n)$ ist endlich ausdrückbar in einer Sprache S , wenn gilt: es gibt eine endliche Menge von Handlungsvorschriften, die in der Sprache S formuliert sind, so daß die Ausführung dieser Handlungsvorschriften an jedem beliebigen Argument n -tupel, für welche das Prädikat P definiert sein soll, in endlich vielen Schritten die Ermittlung des Wahrheitswertes von P für dieses Argument n -tupel zuläßt.

Unter dem Gesichtspunkt dieser Definition wollen wir die Richard'sche Paradoxie noch einmal betrachten.

Die Menge der in S endlich ausdrückbaren Prädikate ist in irgendeiner Aufzählung gegeben:

$A_1(x), A_2(x), \dots A_n(x) \dots$

Das Prädikat $\neg A_n(n) = P(n)$ ist nicht in dieser Menge enthalten. Aber ist es denn zwingenderweise auf Grund seiner Definition endlich ausdrückbar? Gibt es denn eine endliche Menge von Handlungsvorschriften, die für jedes Argument von P dessen Wahrheitswert in endlich vielen Schritten zu berechnen erlaubt? Um P für jedes Argument zu berechnen, müssen wir die Menge aller die A_n ausdrückenden Wortkomplexe zur Verfügung haben; und das ist ein unendlicher Wortkomplex, da wir von der Voraussetzung ausgegangen sind, daß die Menge der aufgezählten Prädikate unendlich ist.

Um etwa den Wahrheitswert von $P(20)$ zu bestimmen, muß ich die Aufzählung der Prädikate bis zum 20sten Glied kennen. Und so wird für wachsendes n die Menge der Handlungsvorschriften wachsen, welche zur Berechnung von $P(n)$ beachtet werden müssen. Es gibt mithin keine endliche Menge von Handlungsvorschriften, durch welche das Prädikat $P(x)$ eindeutig beschrieben werden konnte, es sei denn, es gäbe einen Algorithmus, der die Darstellung aller endlich definierbaren Prädikate in einer gewissen Aufeinanderfolge gestatten würde. Dann ergäbe dieser Algorithmus zusammen mit der Definitionsgleichung: $P(n) = \neg A_n(n)$ eine endliche Menge von Handlungsvorschriften, mit deren Hilfe für jedes Argument n der Wahrheitswert von $P(n)$ in endlich vielen Schritten berechnet werden könnte.

Wir sehen, daß diese zunächst rein intuitive Überlegung auf eine ganz neue Problemstellung geführt hat.

Die Theorie der berechenbaren Funktionen, welche sich in der folgenden Darstellung auf den Begriff der Turingmaschine gründet, der vollkommen dem entspricht, was wir mit der Präzisierung des Begriffs "endlich ausdrückbar" erreichen wollten, gestattet uns die Ableitung eines Satzes, der gerade das Gegenstück zur Richard'schen Paradoxie bildet, und den wir deshalb kennenlernen wollen.

Die Darstellung der Theorie der berechenbaren Funktionen folgt in großen Zügen dem Buch von Davis (Computability & Unsolvability).

§ 2

Theorie der berechenbaren Funktionen

Eine Turingmaschine ist eine endliche Menge von Handlungsvorschriften, wobei jede Handlungsvorschrift eine der folgenden drei Verhaltensmöglichkeiten eines eindimensional endlich anschreibenden Rechners ausdrückt:

- 1) Ersetzen des Symbols, das auf dem betrachteten Feld eines Bandes steht, durch ein anderes,
- 2) vom betrachteten Feld des Bandes auf das benachbarte rechte Feld rücken,
- 3) vom betrachteten Feld des Bandes auf das benachbarte linke Feld rücken.

Da wir die Handlungen jedes Rechners auf die eines eindimensional anschreibenden Rechners zurückführen können, und da dessen Handlungen durch die drei angeführten Verhaltensmöglichkeiten vollständig beschrieben werden können, dürfen wir behaupten, mit der Turingmaschine die gewünschte Präzisierung des endlich ausdrückbaren Prädikates erreicht zu haben.

Die Handlungsvorschrift einer Turingmaschine wird dabei durch ein Quadrupel einer der folgenden Gestalten symbolisiert:

- 1) $q_i \ S_j \ S_k \ q_l$
- 2) $q_i \ S_j \ R \ q_l$
- 3) $q_i \ S_j \ L \ q_l$,

je nachdem, welcher der drei Verhaltensmöglichkeiten des Rechners ausgedrückt werden soll. q_i ist jeweils der Name der Handlungsvorschrift, die an dem gerade betrachteten S_j ausgeführt werden soll; das ist im Fall 1) S_j durch S_k zu ersetzen, im Fall 2) auf das rechts neben S_j liegende Feld, und im Fall 3) auf das links neben S_j liegende Feld zu rücken. Das letzte Symbol q_l bezeichnet den Namen der Handlungsvorschrift, die anschließend ausgeführt werden soll. Will man ein Symbol löschen, so ersetzt man es durch das Symbol S_0 , welches das leere Feld symbolisiert. Eine Augenblicksbeschreibung enthält alle Symbole, die augenblicklich auf dem Band stehen, und den Namen der Handlungsvorschrift, die nun ausgeführt werden soll, wobei dieser Name links von dem Symbol stehen muß, auf das die Vorschrift angewandt werden soll. Eine Berechnung besteht aus einer Folge von Augenblicksbeschreibungen, deren erste das Argument der zu berech-

nenden Funktion und den Namen der zuerst auszuführenden Handlungsvorschrift enthält, und deren letzte den Funktionswert und ein q_i enthält, das auf das benachbarte rechte Symbol S_j nicht anwendbar ist, da unsere Turingmaschine kein Quadrupel enthält, das mit diesem $q_i S_j$ beginnt.

Da ein Prädikat durch seine charakteristische Funktion ausgedrückt werden kann, können wir jedes Prädikat, das endlich ausdrückbar sein soll, durch diejenige Turingmaschine repräsentieren, die für jedes Argument seiner charakteristischen Funktion eine Berechnung liefert.

2.1 Def.

Ein Ausdruck ist eine endliche Folge von Symbolen der folgenden Liste:

$q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ S_1 \ S_2 \ S_3 \ \dots \ R \ L$

2.2 Def.

Ein Quadrupel ist ein Ausdruck einer der folgenden Gestalten:

$q_i \ S_j \ S_k \ q_l, \ q_i \ S_j \ R \ q_l, \ q_i \ S_j \ L \ q_l$

2.3 Def.

Ist $A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4$ ein Quadrupel, so nennen wir das geordnete Paar $t_1 \ t_2$ die Befehlsbasis und das geordnete Paar $A_3 \ A_4$ den Befehl.

2.4 Def.

Zwei Befehlsbasen heißen identisch: $A_1 \ A_2 = B_1 \ B_2$, wenn $A_1 = B_1$ und $A_2 = B_2$.

Zwei Befehle heißen identisch: $A_2 \ A_4 = B_3 \ B_4$, wenn $A_3 = B_3$ und $A_4 = B_4$.

2.5 Def.

Eine Menge von Quadrupeln heißt befehlseindeutig, wenn alle Quadrupel, welche identische Befehlsbasen besitzen, identische Befehle haben.

2.6 Def.

Eine Turingmaschine (abgekürzt TM) ist eine nicht leere endliche Menge von befehlseindeutigen Quadrupeln.

2.7 Def.

Die in den Quadrupeln einer TM vorkommenden S_i bilden das Alphabet der TM.

2.8 Def.

Die in den Quadrupeln einer TM vorkommenden q_i bilden die inneren Konfigurationen der TM.

2.9 Def.

Ein Bandausdruck ist ein Ausdruck, der nur aus Symbolen des Alphabets einer TM besteht.

2.10 Def.

Ein Ausdruck a , in dem weder das Symbol R , noch das Symbol L vorkommt, und der genau ein Symbol q_i so enthält, daß es nicht das letzte Symbol am rechten Ende des Ausdrucks a ist, heißt Augenblicksbeschreibung. Ist das aus q_i und dem auf q_i in a folgendem S_j gebildete Paar $q_i S_j$ mit einer der Befehlsbasen eines Quadrupels der TM Z identisch, und sind die in a vorkommenden S_n Symbole des Alphabets dieser TM, so heißt a eine Augenblicksbeschreibung von Z .

2.11 Def.

Sind a und b Augenblicksbeschreibungen einer TM Z , dann gilt:

$$a \rightarrow b \quad (Z)$$

genau dann, wenn einer der folgenden Fälle zutrifft:

1) es gibt Ausdrücke P und Q , so daß:

$$a = P q_i S_j Q, \quad b = P q_l S_k Q$$

wo $Z q_i S_j S_k q_l$ enthält,

2) es gibt Ausdrücke P und Q , so daß:

$$a = P q_i S_j S_k Q, \quad b = S_j q_l S_k Q$$

wo $Z q_i S_j R q_l$ enthält,

3) es gibt einen Ausdruck P , so daß:

$$a = P q_i S_j, \quad b = P S_j q_l S_o$$

wo $Z q_i S_j R q_l$ enthält,

4) es gibt Ausdrücke P und Q, so daß:

$$a = P S_k q_i S_j Q, \quad b = P q_1 S_k S_j Q$$

wo $Z q_i S_j L q_1$ enthält,

5) es gibt einen Ausdruck Q, so daß:

$$a = q_i S_j Q, \quad b = q_1 S_0 S_j Q$$

wo $Z q_i S_j L q_1$ enthält.

2.12 Def.

Eine Augenblicksbeschreibung a ist final bezüglich Z, wenn es kein b gibt, so daß $a \rightarrow b (Z)$.

2.13 Def.

Eine Berechnung einer TM ist eine endliche Folge von Augenblicksbeschreibungen $a_1 a_2 \dots a_p$, so daß a_p final ist, und

$$a_1 \rightarrow a_2 (Z), \quad a_2 \rightarrow a_3 (Z), \quad \dots \quad a_{p-1} \rightarrow a_p (Z).$$

a_p heißt die Resultante von a_1 .

Symbolisch: $a_p = \text{Res}_Z (a_1)$.

2.14 Def.

Ist n eine natürliche Zahl, so ist der ihr entsprechende Bandausdruck $\bar{n}$ nach folgender Vorschrift zu berechnen:

$$\bar{0} = 1 \quad \overline{n+1} = \bar{n} 1.$$

2.15 Def.

Ist $(n_1 \dots n_k)$ ein k-tupel von natürlichen Zahlen, so ist der ihm zugeordnete Bandausdruck nach folgender Vorschrift zu berechnen:

$$(\overline{n_1 \dots n_k}) = \bar{n}_1 S_0 \dots S_0 \bar{n}_{k-1} S_0 \bar{n}_k$$

2.16 Def.

Ist M irgend ein Ausdruck, so ist $\langle M \rangle$ die Anzahl der in M vorkommenden 1-Symbole.

2.17 Def.

Ist Z eine TM, dann ordnen wir Z eine n-stellige Funktion $\Upsilon_Z (x_1 \dots x_n)$ in folgender Weise zu:

für jedes n-tupel $(m_1 \dots m_n)$ setzen wir $a_1 = q_1 (\overline{m_1 \dots m_n})$

$$\Psi_Z (x_1 \dots x_n) = \begin{cases} \text{Res } (q_1 (\overline{x_1 \dots x_n})) & \text{wo Res } (q_1 (\overline{x_1 \dots x_n})) \\ & \text{definiert ist,} \\ \text{undefiniert, wo Res } (q_1 (\overline{x_1 \dots x_n})) & \\ & \text{undefiniert ist.} \end{cases}$$

2.18 Def.

Eine n-stellige Funktion $f(x_1 \dots x_n)$ ist partial berechenbar, wenn es eine TM Z gibt, so daß

$$f(x_1 \dots x_n) = \Psi_Z(x_1 \dots x_n)$$

2.19 Def.

Eine n-stellige Funktion ist berechenbar, wenn sie partial berechenbar ist, und wenn $\Psi_Z(x_1 \dots x_n)$ total ist.

2.20 Def.

Ein Prädikat ist berechenbar, wenn seine charakteristische Funktion es ist.

2.1 Theorem

Jede partial rekursive Funktion ist partial berechenbar.

2.2 Theorem

Jede rekursive Funktion ist berechenbar.

2.1 Cor.

Ist P ein berechenbares Prädikat, so ist auch $\neg P$ berechenbar. Ist P und Q berechenbar, so ist auch $P \wedge Q$ berechenbar.

2.3 Theorem

Zu jeder Menge von berechenbaren Funktionen gibt es eine berechenbare Funktion, die nicht in dieser Menge enthalten ist.

Beweis:

Sei $f_1 (\mathcal{P}_1) \dots f_n (\mathcal{P}_n)$ eine endliche Menge von berechenbaren Funktionen, so gibt es unter den Zahlen $p_1 \dots p_n$, welche die Anzahl der Argumentstellen der Funktionen $f_1 \dots f_n$ angeben, ein p , für das gilt:

$$p \gg p_k \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n.$$

Die Funktion:

$$U_i^{p+1} (x_1 \dots x_i \dots x_{p+1}),$$

die jedem Argument- $p+1$ -tupel das i -te Argument als Wert zuordnet, ist rekursiv und daher berechenbar. Da diese Funktion aber von größerem Stellenwert als jede Funktion der vorausgesetzten Menge ist, ist sie auch mit keiner dieser Funktionen identisch, und gehört daher nicht zu dieser Menge.

2.2 Cor.

Die Menge der berechenbaren Funktionen ist unendlich.

Nun wollen wir beweisen, daß die Menge der berechenbaren Funktionen abzählbar ist, indem wir zeigen, daß jeder berechenbaren Funktion in umkehrbar eindeutiger Weise eine natürliche Zahl zugeordnet werden kann.

Ist Z eine TM mit den Symbolen: $R \ L \ S_1 \ q_1 \ S_2 \ q_2 \dots$,
so ordnen wir diesen die Zahlen: 3 5 7 9 11 13 ... zu.

D. h. für jedes i wird S_i der Zahl $4i + 7$
und q_i der Zahl $4i + 5$ zugeordnet.

Jedem Ausdruck M von Z wird die Folge von ungeraden Zahlen zugeordnet, die entsteht, wenn man jedes Symbol von M durch die diesem Symbol zugeordnete Zahl ersetzt.

2.11 Def.

Ist M ein Ausdruck, der aus der Symbolfolge $m_1 \dots m_n$ besteht, und ist $a_1 \dots a_n$ die dieser Folge durch die obige Vorschrift zugeordnete Zahlenfolge, so ist die Gödelzahl von M :

$$gn(M) = \prod_{K=1}^n Pr(K)^{a_K}$$

2.22 Def.

Ist S eine Folge von Ausdrücken $M_1 \dots M_n$, dann ist die Gödelzahl von S :

$$gn(S) = \prod_{K=1}^n Pr(K)^{gn(M_K)}$$

2.23 Def.

Ist Z eine TM und ist $M_1 \dots M_n$ irgendeine Anordnung ihrer Quadrupel ohne Wiederholungen, dann ist die Gödelzahl dieser Folge eine der Gödelzahlen von Z .

2.3 Cor.

Eine TM, die aus n Quadrupeln besteht, hat $n!$ Gödelzahlen.

2.4 Theorem

Die vorgenommene Gödelisierung ist eineindeutig, d. h. zwei verschiedene Turingmaschinen haben auch zwei verschiedene Mengen von Gödelzahlen, und aus jeder Gödelzahl einer Turingmaschine kann auf diese und nur diese Turingmaschine geschlossen werden.

2.24 Def.

Für jedes $n > 0$ sei $T(z, x_1 \dots x_n, y)$ das Prädikat, das bedeutet: für gegebenes $z, x_1 \dots x_n, y$ ist z eine Gödelzahl einer TM Z und y die Gödelzahl einer Berechnung von Z , die mit der Augenblicksbeschreibung $q_1(\overline{x_1 \dots x_n})$ beginnt.

2.25 Def.

$U(x)$ sei das Prädikat, das bedeutet: ist x die Gödelzahl einer Berechnung, deren finale Augenblicksbeschreibung a_n ist, so ist $U(x)$ die Anzahl der in a_n vorkommenden 1-Symbole.

2.5 Theorem

$T(z, x_1 \dots x_n, y)$ ist ein berechenbares Prädikat.

2.6 Theorem

$U(y)$ ist eine berechenbare Funktion.

2.7 Theorem

Ist Z eine TM und ist z eine ihrer Gödelzahlen, dann ist der Definitionsbereich der Funktion $\Psi_Z(x_1 \dots x_n)$ identisch mit dem Definitionsbereich von $\min y T(z, x_1 \dots x_n, y)$.

Insbesondere gilt: $\Psi_Z(x_1 \dots x_n) = U(\min y T(z, x_1 \dots x_n, y))$.

Der Beweis dieses Theorems folgt unmittelbar aus den Definitionen.

2.4 Cor.

$f(x_1 \dots x_n)$ ist partial berechenbar dann und nur dann, wenn eine Zahl z_0 existiert, so daß:

$$f(x_1 \dots x_n) = U(\min y T(z_0, x_1 \dots x_n, y))$$

2.26 Def.

Ein Prädikat ist semiberechenbar, wenn es eine partial berechenbare Funktion gibt, deren Definitionsbereich die Extension dieses Prädikates ist.

2.8 Theorem

Jedes berechenbare Prädikat ist semiberechenbar.

Beweis:

$R(x_1 \dots x_n)$ sei berechenbar; dann ist $(x_1 \dots x_n / R(x_1 \dots x_n))$

der Bereich der partial berechenbaren Funktion:

$$\min y (C_R(x_1 \dots x_n) + y = 0)$$

2.9 Theorem

Ist $R(x_1 \dots x_n) \leftrightarrow \bigvee_y P(y, x_1 \dots x_n)$, wobei $P(y, x_1 \dots x_n)$ berechenbar ist, dann ist $R(x_1 \dots x_n)$ semiberechenbar.

Beweis:

$(x_1 \dots x_n / R(x_1 \dots x_n))$ ist der Bereich der partial berechenbaren Funktion $\min y (C_P(y, x_1 \dots x_n) = 0)$.

2.10 Theorem

Ist $R(x_1 \dots x_n)$ semiberechenbar, so gibt es ein berechenbares Prädikat: $P(y, x_1 \dots x_n)$, so daß

$$R(x_1 \dots x_n) \leftrightarrow \bigvee_y P(y, x_1 \dots x_n).$$

Beweis:

$(x_1 \dots x_n / R(x_1 \dots x_n))$ ist der Bereich einer partial berechenbaren Funktion $f(x_1 \dots x_n)$. Zu dieser Funktion gibt es eine Zahl z_0 , so daß $f(x_1 \dots x_n) = U(\min y T(z_0, x_1 \dots x_n, y))$.

Daher ist der Definitionsbereich von $f(x_1 \dots x_n)$ die Menge:

$$(x_1 \dots x_n / \bigvee_y T(z_0, x_1 \dots x_n, y))$$

$$\text{also: } R(x_1 \dots x_n) \leftrightarrow \bigvee_y T(z_0, x_1 \dots x_n, y).$$

Das Aufzählungstheorem von Kleene:

Ist $R(x_1 \dots x_n)$ ein semiberechenbares Prädikat, dann gibt es eine Zahl z_0 , so daß $R(x_1 \dots x_n) \leftrightarrow \bigvee_y T(z_0, x_1 \dots x_n, y)$.

Damit haben wir bewiesen, daß es eine Abzählung der Menge der semiberechenbaren Prädikate gibt. Denken wir uns eine solche Abzählung gegeben, so ist das Prädikat $\neg \bigvee_y T(x, x, y)$ in ihr nicht enthalten, denn sonst müßte es ein z_0 geben, so daß

$\neg \bigvee_y T(x, x, y) \leftrightarrow \bigvee_y T(z_0, x, y)$, was für $x = z_0$ auf einen Widerspruch führt.

Das Prädikat $\neg \bigvee_y T(x, x, y)$ ist also nicht semiberechenbar. Insbesondere gibt es keine partial berechenbare Funktion, deren Definitionsbereich mit der Extension dieses Prädikates identisch ist. Dies entspricht gerade der Bedeutung dieses Prädikates, denn dieses besagt ja: es gibt kein y , das Gödelzahl einer Berechnung einer TM mit Gödelzahl x ist, so daß die Berechnung mit $q_1(\bar{x})$ beginnt. Gäbe es eine partial berechenbare Funktion $f(x)$, so daß der Bereich von $f(x)$ mit der Extension von $\neg \bigvee_y T(x, x, y)$ identisch ist, so gäbe es eine TM Z , so daß $\Psi_Z(x) = f(x)$. $\Psi_Z(x)$ ist aber nur definiert, wenn es eine Berechnung von Z gibt, die mit $q_1(\bar{x})$ beginnt. Ist z_0 eine der Gödelzahlen von Z , und liefert Z für $q_1(\bar{z}_0)$ eine Berechnung, so steht das im Widerspruch zur Bedeutung des Prädikates. Liefert Z für $q_1(\bar{z}_0)$ keine Berechnung, so wäre $f(z_0)$ für z_0 undefiniert, während $\neg \bigvee_y T(x, x, y)$ für alle x definiert ist, die Gödelzahlen sind. Dann ist also der Bereich von $f(x)$ nicht mit der Extension von $\neg \bigvee_y T(x, x, y)$ identisch.

Nachdem wir nun erkannt haben, daß die Bedeutung dieses Prädikates mit dem übereinstimmt, was wir im System über dieses Prädikat beweisen konnten, wollen wir noch zeigen, daß es tatsächlich semiberechenbare Prädikate gibt, die nicht berechenbar sind.

2.11 Theorem

Ein Prädikat ist genau dann berechenbar, wenn es selbst und seine Negation semiberechenbar ist.

Beweis:

$R(x_1 \dots x_n)$ sei berechenbar, dann ist auch $\neg R(x_1 \dots x_n)$ berechenbar, und daher sind beide semiberechenbar.

Ist $R(x_1 \dots x_n)$ ebenso wie $\neg R(x_1 \dots x_n)$ semiberechenbar, dann gilt:

$$\begin{aligned} \neg R(x_1 \dots x_n) &= \bigvee_y Q(y, x_1 \dots x_n) \\ R(x_1 \dots x_n) &= \bigvee_y P(y, x_1 \dots x_n) \end{aligned} \quad \text{wo } P \text{ und } Q \text{ berechenbar sind.}$$

Daher ist für jedes $x_1 \dots x_n$ der Satz

$\bigvee_y Q(y, x_1 \dots x_n) \vee \bigvee_y P(y, x_1 \dots x_n)$ wahr.

Die Funktion $h(x_1 \dots x_n) = \min_y (P(y, x_1 \dots x_n) \vee Q(y, x_1 \dots x_n))$ ist daher berechenbar. $R(x_1 \dots x_n)$ ist aber äquivalent mit dem berechenbaren Prädikat $P(h(x_1 \dots x_n), x_1 \dots x_n)$. Also ist $R(x_1 \dots x_n)$ berechenbar.

2.12 Theorem

Das Prädikat $\bigvee_y T(x, x, y)$ ist semiberechenbar, aber nicht berechenbar.

Beweis:

Wäre $\bigvee_y T(x, x, y)$ berechenbar, dann müßte auch $\neg \bigvee_y T(x, x, y)$ semiberechenbar sein, was wir bereits widerlegt haben.

Wir sehen, daß die Menge der berechenbaren Prädikate eine echte Teilmenge der Menge der semiberechenbaren Prädikate ist. Da es zu jeder berechenbaren Funktion $f(\mathcal{C}^n)$ ein berechenbares Prädikat $f(\mathcal{C}^n) = y$ gibt, und die Menge der berechenbaren Funktionen unendlich ist, ist auch die Menge der berechenbaren Prädikate unendlich. Andererseits ist diese als Teilmenge der abzählbaren Menge der semiberechenbaren Prädikate abzählbar. Also ist sie abzählbar unendlich. Und damit haben wir unsere Vermutung, daß unter Bezugnahme auf eine abzählbare unendliche Gesamtheit von berechenbaren Prädikaten ein nicht berechenbares Prädikat konstruiert werden kann, bewiesen. Nun wollen wir noch versuchen, die Richard'sche Paradoxie in diesem System nachzuzeichnen.

Die Menge der einstelligen Zahlprädikate ist eine echte Teilmenge aller Zahlprädikate. Die Menge aller berechenbaren Zahlprädikate ist, wie wir eben bewiesen haben, abzählbar unendlich. Also ist die Menge aller berechenbaren einstelligen Zahlprädikate abzählbar. Nach Def. 1.20 und Cor. 2.2 ist ein Prädikat genau dann berechenbar, wenn es eine Zahl z gibt, so daß:

$C_P(x) = U(\min_y T(z, x, y))$ und $C_P(x)$ total ist.

Durch dieses z kann jedes berechenbare einstellige Zahlprädikat umkehrbar eindeutig charakterisiert werden:

$P_{z_1}(x) \quad P_{z_2}(x) \quad P_{z_3}(x) \dots$

Das Prädikat $P(x) = \neg P_x(x)$ unterscheidet sich von jedem Prädikat dieser Aufzählung. Es ist aber nicht notwendig berechenbar, da es nicht die Negation eines berechenbaren Prädikates ist, sondern unter Bezugnahme auf alle berechenbaren Prädikate definiert wurde. Wir werden nun zeigen, daß es tatsächlich nicht berechenbar ist.

Wäre $P(x)$ berechenbar, so wäre seine charakteristische Funktion total und berechenbar.

$$C_P(x) = 1 \stackrel{!}{=} C_{P_x}(x) = 1 \stackrel{!}{=} U(\min y T(x, x, y))$$

Wäre $C_P(x)$ berechenbar, so gäbe es ein z , so daß

$$C_P(x) = U(\min y T(z, x, y)) = 1 \stackrel{!}{=} U(\min y T(x, x, y)).$$

Da die $P_{z_i}(x)$ berechenbar sind, sind die $C_{P_{z_i}}(x)$ total und daher auch für $x = z$ definiert.

$$C_P(z) = 1 \stackrel{!}{=} C_{P_z}(z) = 1 \stackrel{!}{=} U(\min y T(z, z, y)) = U(\min y T(z, z, y))$$

Die Annahme, daß $P(x)$ berechenbar sei, ist durch diesen Widerspruch widerlegt. Es ist also nicht gelungen, im Rahmen dieser Theorie die Richard'sche Paradoxie zu rekonstruieren. Anstelle einer Paradoxie haben wir einen Lehrsatz des Systems bewiesen.

§ 3

Vergleich der Ergebnisse mit der Paradoxie von Richard

Abschließend wollen wir einen Vergleich zwischen diesem Ergebnis und der Richard'schen Paradoxie ziehen, indem wir uns die ungleichen Voraussetzungen, auf welche die Verschiedenheit der Ergebnisse zurückzuführen ist, vor Augen führen.

Die Numerierung der Prädikate im Fall der Richard'schen Paradoxie war ganz beliebig, und sollte nur zum Ausdruck bringen, daß die Menge dieser Prädikate abzählbar unendlich ist. Die Existenz eines Abzählungsverfahrens konnten wir wegen der Möglichkeit der Gödelisierung der Prädikate voraussetzen, aber es war doch so, daß die spezielle Nummer des Prädikates über dieses Prädikat nichts weiter aussagte, als daß sein Name aus endlich

vielen Buchstaben besteht.

Im zweiten Fall besagte die Nummer des Prädikates viel mehr; denn hier war sie die Gödelzahl des effektiven Entscheidungsverfahrens, das für dieses Prädikat existiert.

Während also im ersten Fall die Numerierung der Prädikate eine Zuordnung ihrer Namen zu natürlichen Zahlen war, drückte im zweiten Fall die Numerierung der Prädikate keine Aussage über die Mächtigkeit dieser Prädikatmenge aus, sondern die Zuordnung zu effektiven Entscheidungsverfahren. Wenngleich es evident ist, daß die Menge der endlichen Prädikatnamen, die aus einem abzählbar unendlichen Alphabet gebildet werden, abzählbar unendlich ist, so daß zu jedem endlichen Prädikatnamen genau eine natürliche Zahl existieren muß, ist es nicht evident, daß es zu jedem Prädikat, dem ein endlicher Name zugeordnet werden kann, ein effektives Entscheidungsverfahren gibt. Wie die Theorie der Turingmaschinen zeigt, ist dies sogar unmöglich.

KAPITEL 4

§ 1

Die Grellingsche Paradoxie

Wir setzen eine Sprache T voraus, die für jeden in ihr zulässigen Ausdruck einen Namen enthält, d.h. zu jedem Ausdruck in T gibt es in T ein Zeichen, das der Name dieses Ausdrucks sein soll, und haben zwei Ausdrücke den gleichen Namen, so sind diese Ausdrücke identisch.

Wie die Zuordnung zwischen Namen und Ausdrücken von T gewählt wird, ist gleichgültig. Wir wollen sagen: ein Zeichen n_i ist der Name des Ausdrucks p_i , dann und nur dann, wenn gilt: f ist die Abbildung, die jedem Ausdruck in T ein Zeichen in T zuordnet, so daß verschiedenen Zeichen auch verschiedene Ausdrücke von T entsprechen, und $f(p_i) = n_i$.

P sei die Klasse aller in T zulässigen einstelligigen Prädikate p .

N ist die Klasse der Namen aller Elemente von P , d. h. die Elemente n von N sind die f -Bilder der Elemente von P .

N kann folgendermaßen in zwei Klassen N_1 und N_2 eingeteilt werden:

$$N_1 = (n / \bigvee_p (p \in P \wedge f(p) = n \wedge p(n)))$$

$$N_2 = (n / \bigvee_p (p \in P \wedge f(p) = n \wedge \neg p(n)))$$

Das Prädikat, das die Menge N_2 definiert, ist ein einstelliges Prädikat, und daher Element von P . Wir führen für dieses Prädikat die Abkürzung $Het(n)$ ein:

$$Het(n) =_{\text{def}} \bigvee_p (p \in P \wedge f(p) = n \wedge \neg p(n))$$

Der Name von Het sei " Het ". " Het " ist Element von N , d. h. er liegt in N_1 oder in N_2 .

$$1) "Het" \in N_1 \quad (\text{Annahme})$$

$$2) "Het" \in N_1 \rightarrow \bigvee_p (p \in P \wedge f(p) = "Het" \wedge p("Het")) \quad (L, 1)$$

$$3) \bigvee_p (p \in P \wedge f(p) = "Het" \wedge p("Het")) \quad (L, 1, 2)$$

$$4) Het \in P \wedge f(Het) = "Het" \quad (\text{Def. von "Het"})$$

$$5) \text{ Het} \in P \wedge f(\text{Het}) = \text{"Het"} \wedge \text{Het} (\text{"Het"}) \quad (L, 3)$$

$$6) \text{ Het} (\text{"Het"}) \quad (L, 4, 5)$$

$$7) \text{ Het} (\text{"Het"}) \leftrightarrow \bigvee_p (p \in P \wedge f(p) = \text{"Het"} \wedge \neg p (\text{"Het"})) \quad (\text{Def. von Het})$$

$$8) \text{ Het} (\text{"Het"}) \leftrightarrow \text{"Het"} \in N_2 \quad (\text{Def. von Het})$$

$$9) \text{"Het"} \in N_1 \rightarrow \text{"Het"} \in N_2 \quad (L, 1, 8)$$

Also war die Annahme $\text{"Het"} \in N_1$ falsch.

$$1) \text{"Het"} \in N_2 \quad (\text{Annahme})$$

$$2) \text{"Het"} \in N_2 \rightarrow \bigvee_p (p \in P \wedge f(p) = \text{"Het"} \wedge \neg p (\text{"Het"})) \quad (\text{Def. von } N_2)$$

$$3) \bigvee_p (p \in P \wedge f(p) = \text{"Het"} \wedge \neg p (\text{"Het"})) \quad (L, 1, 2)$$

$$4) \text{ Het} \in P \wedge f(\text{Het}) = \text{"Het"} \quad (\text{Def. von "Het"})$$

$$5) \neg \text{Het} (\text{"Het"}) \quad (L, 3, 4)$$

$$6) \neg \text{Het} (\text{"Het"}) \leftrightarrow \text{"Het"} \notin N_2 \quad (\text{Def. von } N_2)$$

$$7) \text{"Het"} \in N_2 \rightarrow \text{"Het"} \notin N_2 \quad (L, 1, 6)$$

Also war auch die Annahme $\text{"Het"} \in N_2$ falsch, was im Widerspruch zu der Voraussetzung steht, daß "Het" als Name eines Prädikates der Menge P in der Menge M enthalten ist.

Die Grellingsche Antinomie beruht auf der Annahme, daß die Klasse der Namen aller in T zulässigen einstelligen Individuenprädikate eine Teilklasse des Individuenbereiches sei. Diese Annahme kommt in der Forderung zum Ausdruck, daß "Het" zu einer der Klassen N_1 oder N_2 gehören müsse; denn die Elemente von N_1 bzw. N_2 gehören jeweils zum Definitionsbereich des Prädikates, dessen Name sie sind, und diese Prädikate waren als einstellige Individuenprädikate vorausgesetzt. Also sind die Elemente von N_1 bzw. N_2 Elemente des Individuenbereiches.

Wenn man es nicht für selbstverständlich hält, daß der Name jedes in T zulässigen einstelligen Individuenprädikates Element des Individuenbereiches ist, so kann man die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß N durch N_1 und N_2 nicht ganz erschöpft wird, so daß es Elemente von N gibt, die weder in N_1 noch in N_2 liegen. Eine solche Auffassung läßt es zu, die Grellingsche Paradoxie als Widerspruchsbeweis zu formulieren, was wir nun tun wollen.

Ist N Teilmenge des Individuenbereichs, so gilt von jedem x , das Element von N ist:

$$\bigvee_y (y \in P \wedge f(y) = x \wedge (y(x) \vee \neg y(x))).$$

Also gehört jedes x zu einer der Klassen N_1 oder N_2 , wobei

$$N_1 = (x / \bigvee_y (y \in P \wedge f(y) = x \wedge y(x))) \quad \text{und}$$

$$N_2 = (x / \bigvee_y (y \in P \wedge f(y) = x \wedge \neg y(x))).$$

Da die Menge N_2 definierende Prädikat ist ein einstelliges Individuenprädikat, da N und damit auch N_2 als Teilmenge des Individuenbereiches vorausgesetzt war. Wir wollen es mit $\text{Het}(x)$ abkürzen. $\text{Het}(x)$ ist Element von P . Der Name von $\text{Het}(x)$ sei "Het". Er liegt in N , und daher entweder in N_1 oder in N_2 .

Da aber "Het" weder in N_1 noch in N_2 liegen kann, wie wir schon bewiesen haben, andererseits aber Element von N ist, war die Annahme falsch, daß N eine Teilklasse des Individuenbereiches ist.

Diese Darstellung der Grellingschen Paradoxie als Widerspruchsbeweis läßt die Ähnlichkeit mit dem Beweis des Cantorsche Theorems besonders klar zu Tage treten. Der Menge M dort entspricht hier die Menge der Elemente, die entweder in N_1 oder in N_2 liegen. Der Potenzmenge von M entspricht hier die Menge P aller in T zulässigen einstelligen Individuenprädikate. Der Menge p_0 entspricht hier das Prädikat $\text{Het}(x)$, und dem Bild von p_0 entspricht hier der Name von $\text{Het}(x)$.

Beim Cantorsche Theorem stellte sich heraus, daß das Bild m_0 von p_0 weder in p_0 als Element enthalten ist, noch nicht in p_0 als Element enthalten ist, da es in M überhaupt kein Bild von p_0 gibt. In diesem Fall hier stellen wir fest, daß der Name "Het" weder in N_1 noch in N_2 liegen kann, woraus wir den Schluß ziehen müssen, daß die Klasse N nicht Teilklasse des Individuenbereiches ist, oder, wie wir uns auch ausdrücken könnten, daß es keine eindeutige Abbildung der Klasse aller Namen der in einer Sprache zulässigen Individuenprädikate mit einer freien Variablen auf die Menge der Individuen dieser Sprache gibt.

Die Antinomie verschwindet, wenn man die Annahme fallen läßt, daß die Klasse der Namen in T eine Teilklasse des Individuenbereiches sei.

ZUSAMMENFASSUNG DER ERGEBNISSE

Wir haben nun Paradoxien und Theoreme, die hinsichtlich ihrer Ableitung paarweise miteinander vergleichbar waren, gegenübergestellt und können als Ergebnis dieses Vergleichs zunächst folgendes feststellen:

War das Resultat einer Anwendung des CDV ein Theorem, so war die Annahme der Existenz einer eindeutigen Abbildung zwischen M_1 und M_2 durch die Konstruktion des Diagonalelements widerlegt worden.

War das Resultat einer Anwendung des CDV eine Paradoxie, so war die Tatsache der Existenz einer eindeutigen Abbildung zwischen M_1 und M_2 durch die Konstruktion des Diagonalelements widerlegt worden.

Allen behandelten Fällen war der Umstand gemeinsam, daß das Diagonalelement unter Bezugnahme auf eine als existent angenommene eindeutige Abbildung definiert worden war. Wie wir schon bei der vorläufigen Darstellung des CDV bemerkt haben, können dadurch die Voraussetzungen, die implizit bei der Definition des Diagonalelements gemacht werden müssen, problematisch sein.

Bei der Untersuchung dieser Voraussetzungen haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

- 1) die Abbildung f ist nicht konstruktiv erzeugbar
- 2) die Abbildung f ist konstruktiv erzeugbar.

Zu 1) In allen Fällen, in denen das Diagonalelement unter der Annahme der Existenz einer nicht konstruktiv erzeugbaren Abbildung definiert wurde, mußte vom Begriff des aktual Unendlichen Gebrauch gemacht werden. Vom Standpunkt des Konstruktivismus liegt hier sogar eine unzulässige Zirkularität in der Definition vor, die dem Grad nach verschieden ist, je nachdem ein Theorem oder eine Paradoxie abgeleitet wurde.

Beim Beweis eines Theorems war jeweils unter der Annahme, daß es eine eindeutige Abbildung f gebe, unter Bezugnahme auf f ein Element definiert worden, dem durch f kein Bild zugeordnet

wurde. Die Definition dieses Diagonalelementes setzte zwar die Menge voraus, der es selbst hätte angehören müssen, wenn ein eineindeutiges f existieren würde. Indem aber die Existenz eines solchen f durch die Definition des Diagonalelements widerlegt wurde, stellt sich nachträglich heraus, daß seine Definition gar nicht auf eine Menge Bezug genommen hatte, der es selbst angehört und infolgedessen in dieser Hinsicht nicht zirkulär war. Aber an die Stelle der als nur scheinbar erkannten Zirkularität tritt eine andere, die nicht beseitigt werden kann. Dies erkennt man am besten an einer Fassung des jeweils zu beweisenden Theorems, die keinen Widerspruchsbeweis erfordert:

Zu jeder eineindeutigen Abbildung einer Teilmenge M_1 einer Menge M_1 auf eine Menge M_2 gibt es ein Element von M_1 , dem durch diese Abbildung kein Element von M_2 zugeordnet werden kann.

Beim Beweis eines solchen Satzes, der wieder in der Definition eines Diagonalelementes beruht, wird nicht auf eine Menge Bezug genommen, der das Diagonalelement voraussetzungsgemäß angehört, sondern auf die Abbildung f und somit wird für die Definition des Diagonalelements, von dem erst bewiesen werden soll, daß es nicht Element der Abbildung ist, die Entscheidung darüber vorausgesetzt, welche Gegenstände Elemente der Abbildung sind.

Bei den Paradoxien dagegen geht die Existenz einer eineindeutigen Abbildung in die Voraussetzungen ein. Die Definition des Diagonalelements nimmt hier auf eine Menge Bezug, der es infolgedessen selbst angehören muß.

Wer den Begriff des aktual Unendlichen als ontologische Voraussetzung von Logik und Mathematik anerkennt, kann an dieser Imprädikativität keinen Anstoß nehmen. Denn für ihn wird die Existenz einer Menge nicht erst durch die konstruktive Erzeugung ihrer Elemente gewährleistet, sondern, wie das Komprehensionsaxiom der naiven Mengenlehre gezeigt hat, bereits durch eine Aussageform, welche das definierende Merkmal darstellt, nach dem alle Entitäten, denen dieses Merkmal zukommt, zusammengefaßt werden. Nach dieser Auffassung werden Mengen nicht durch die Erschaffung ihrer Elemente erzeugt, sondern durch die Zusammenfassung von Gegen-

ständen einer schon vorhandenen unendlichen Platonischen Welt durch je ein gemeinsames Merkmal.

Für konsequente Vertreter dieses Standpunktes gibt es keine Erklärung oder Auflösung von Antinomien. Ihnen bleibt nur die Möglichkeit, im Rahmen axiomatischer Theorien die Vermeidung von Paradoxien anzustreben. Diese Verfahren sind oft erfolgreich, scheinen uns aber zur Lösung des Antinomienproblems keinen intuitiv befriedigenden Beitrag zu leisten.

- zu 2) Ist dagegen die Abbildung f konstruktiv gegeben, wie wir das im Fall der Paradoxie von Richard kennengelernt haben, wo mit der Methode der Gödelisierung ein konstruktives eindeutiges Abbildungsverfahren gegeben war, so ist für das Zustandekommen des Widerspruchs keine imprädikative Begriffsbildung verantwortlich zu machen. Wir konnten hier auch zeigen, daß eine falsche Annahme den Widerspruch impliziert hatte. Der dieser Paradoxie entsprechende Satz der Theorie der berechenbaren Funktionen beruht ausschließlich auf konstruktiven Begriffsbildungen und macht dementsprechend von keinen problematischen Voraussetzungen Gebrauch. Er darf auch im Sinne des Konstruktivismus als gesichert angesehen werden.

Abschließend können wir feststellen, daß die von uns vorläufig gegebene Darstellung des Cantorschen Diagonalverfahrens weder ein logisch zulässiges noch ein logisch unzulässiges Verfahren darstellt, da seine Problematik in den ontologischen Voraussetzungen beruht, die bei seiner Anwendung im Einzelfall gemacht werden.

Wenn wir uns auch kein Urteil darüber anmaßen können, inwieweit nicht-konstruktive Beweismethoden logisch gerechtfertigt werden können, so dürfen wir doch sagen, daß es gewisse Anwendungsfälle des Cantorschen Diagonalverfahrens gibt, gegen die auch vom Standpunkt eines strengen Konstruktivismus nichts einzuwenden ist. Diese Erkenntnis weist immerhin den Verdacht, daß das CDV ein prinzipiell widersinniges Beweisprinzip sei, zurück.

LEBENS LAUF

Ich, Eva Kobler, bin am 5. April 1937 als Tochter des städt. Verwaltungsrates Georg Kobler und seiner Ehefrau Maria, geborene Albrecht, in München geboren. Nach einer vierjährigen Volksschulausbildung trat ich 1947 in das städt. Mädchen-Realgymnasium München-Nord (die heutige Sophie-Scholl-Schule) ein, wo ich 1956 die Reifeprüfung ablegte.

Seit dem Herbst 1956 studiere ich an der Ludwig-Maximilians-Universität in München, wo ich zunächst in der Naturwissenschaftlichen Fakultät, seit Sommer 1960 in der Naturwissenschaftlichen und Philosophischen Fakultät immatrikuliert war. Bis 1960 beschäftigte ich mich vorwiegend mit Naturwissenschaften, um mich dann mit dem Ziel der Promotion fast ganz dem Studium der Philosophie, Logik und Grundlagenforschung und Sprechkunde zu widmen. Zu diesem Zeitpunkt begann ich auch mit der Bearbeitung des von der Philosophischen Fakultät als Preisschrift ausgeschriebenen Themas "Die Bedeutung des Cantorschen Diagonalverfahrens für die moderne Grundlagenforschung". Meine Arbeit wurde beim Stiftungsfest 1962 mit dem vollen Preis der Philosophischen Fakultät ausgezeichnet. Die Neubearbeitung der Schrift als Dissertation entstand unter der Leitung von Professor Dr. Dr. W. Stegmüller.

Ich hatte Vorlesungen, Übungen und Seminare in Mathematik bei den Professoren Aumann, Knobloch, Lenz, Richter, Schmidt, Seebach, Sommer und den Dozenten Bierlein, Röhl und Thoma belegt, in Physik bei den Professoren Bopp, Faessler, Gerlach, Rollwagen, Schlüter, Schmeidler, Astronomie bei Professor Schmeidler, Sprechkunde bei Frau Professor Weithase und Lektor Zehetmeier, Logik und Grundlagenforschung bei Professor Britzelmayr, Philosophie bei den Professoren Kuhn, Leist, Neuhäusler, Stegmüller, Wenzl und dem Privatdozenten Käsbauer. Außerdem hatte ich eine Vorlesung in Chemie bei Professor Wiberg und eine kunsthistorische Vorlesung bei Professor Sedelmeier belegt.

